명제논리

엄태현

ver 20180524

명제논리계(Propositional Logic System) (L, W, In)는 명제소(alphabet)들 A과 연결자 및 보조글자로 이루어진 글자집합 L과 이로부터 구성되는 적절한 명제들(Well-formed formula)의 집합 W, 그리고 추론규칙들의 집합 $In = \{f_s : W_s \to W \times \mathcal{P}(W) \times \mathbb{N} \mid s \in S\}$로 이루어진다. 여기서 각 W_s는 $\mathcal{P}(W \times \mathcal{P}(W) \times \mathbb{N})$의 부분집합이며 모든 $X \in W_s$에 대해 $|X| < \infty$를 만족해야 한다.마지막으로, 이 뒤 전개에서는 최소 $|A| \geq 2$를 가정하자.

명제논리계에서 $H \subseteq W$라는 가정하에서 $r \in W$의 증명은 유한한 길이의 명제와, 가정, 깊이로 이루어진 나열 $Pr = (w_1, H_1, d_1), \cdots, (w_s, H_s, d_s)$로서, 각 $1 \leq i \leq s$에 대해

- $w_i \in H$, $H_i \subseteq H$, $d_i = 1$이거나,
- $d_i > 1$이고 어떤 $H' \subseteq W$와 $r' \in W$, $a \leq i \leq b$가 존재하여 $Pr[a..b]$의 최소 깊이가 d_i이면서 $Pr[a..b]$의 깊이를 1씩 감소시킨 것이 $H \cup H'$에서 r'의 증명이거나
- 어떤 u와 $j_1 < \cdots < j_k < i$가 존재하여 $f_u(\{(w_{j_v}, H_v, d_{j_v}) \mid 1 \leq v \leq k\}) = (w_i, H_i, d_i)$

이고, $w_s = r$, $d_s = 1$인 것을 말한다. H라는 가정하에서 r의 증명의 집합을 $\mathrm{Pr}(H, r)$으로 하고, H라는 가정하에서 r의 증명이 존재하는 r들을 H 하에서 정리라고 한다. $\mathrm{Th}(H)$는 H 하에서 정리들의 집합이고, $\phi \in \mathrm{Th}(H)$를 $H \vdash \phi$로 나타낸다.

명제논리계에서 배정이라는 것은 단순히 $I : A \to \{0, 1\}$인 함수이고, 평가규칙이라는 것은 $Ev : \{I : A \to \{0, 1\}\} \to \{\bar{I} : W \to \{0, 1\}\}$이면서 모든 명제소 p에 대해 $Ev(I)(p) = I(p)$인 함수다. 평가규칙 Ev 하에서 명제 ϕ가 뻔하다(tautology)는 것은 임의의 배정 I에 대해 $Ev(I)(\phi) = 1 = Ev_I(\phi)$인 것을 의미한다. Ev 하에서 뻔한 명제들의 집합을 $\mathrm{Tau}(Ev)$라 한다.

공리 $Ax \subseteq W$와 평가규칙 Ev가 있는 명제논리계 (L, W, In, Ax, Ev)가 적절(sound)하다는 것은 $\mathrm{Th}(Ax) \subseteq \mathrm{Tau}(Ev)$이라는 것이고 완전(complete)하다는 것 $\mathrm{Tau}(Ev) \subseteq \mathrm{Th}(Ax)$라는 것을 의미한다. 공리가 적절하다는 것은 모든 공리가 뻔한 것이고, 추론규칙이 뻔하다는 것은 추론규칙에 사용된 깊이 1인 명제가 모두 뻔할 때 결과가 뻔한 것을 의미한다. 공리와 추론규칙이 적절하다면 해당 명제논리계는 적절하다. 공리 Ax가 명시되어 있다면 공리계는 $\vdash$의 좌변에서 제외하여도 좋다. 즉 $H \vdash \phi$는 일종의 $Ax, H \vdash \phi$의 축약형이다.

힐베르트 논리계는 연결자 $\neg, \rightarrow$와 보조글자 $[,]$를 가지고 있으며, 유일한 추론규칙 Modus ponens, $f(\{(\varphi, \emptyset, 1), (\varphi \rightarrow \psi, \emptyset, 1)\}) = (\psi, \emptyset, 1)$로 이루어져있다. 힐베르트 논리계에서는 모든 깊이가 1로 고정되기 때문에 편의상 깊이를 생략해도 문제없다. 힐베르트 논리계에서 적절한 공리를 생각할 때, 최우선적으로 고려해야 할 것은 연역규칙을 보장하는 것이다. 공리 집합 Ax가 연역규칙을 만족한다는 것은 임의의 명제 ϕ, ψ와 $H \subseteq W$에 대해 $\phi \rightarrow \psi \in \mathrm{Th}(Ax \cup H)$와 $\xi \in \mathrm{Th}(Ax \cup H \cup \{\phi\})$가 동치라는 의미다. 정방향은 증명의 정의와 Modus ponens에 의해 자명하다. 역방향을 가장 직관적으로 보이는 것은 ξ의 $Ax \cup H \cup \{\xi\}$ 하에서의 증명 $Pr = w_1, \cdots, w_s$가 있으면 $\phi \rightarrow w_i$가 등장하는 $Ax \cup H$ 하에서의 증명을 찾을 수 있게 하는 것이다. 각 w_i에 대해서 다음 중 하나를 만족한다.

- $w_i = \phi$
- $w_i \in Ax \cup H$
- 어떤 $j, k < i$가 있어 $w_k = [w_j \rightarrow w_i]$.

첫번째 경우는 $\phi \rightarrow \phi$를 항상 유도할 수 있어야 한다. 두번째 경우는 w_i로부터 $\phi \rightarrow w_i$를 유도할 수 있어야 하고, 세번째 경우는 $\phi \rightarrow [w_j \rightarrow w_i]$와 $\phi \rightarrow w_j$로부터 $\phi \rightarrow w_i$를 유도할 수 있어야 한다. 이로부터 자연스러운 공리

- $\phi \rightarrow \phi$ (A0)
- $\psi \rightarrow [\phi \rightarrow \psi]$ (A1)
- $[\phi \rightarrow [\psi \rightarrow \eta]] \rightarrow [[\phi \rightarrow \psi] \rightarrow [\phi \rightarrow \eta]]$ (A2)

를 이끌어낼 수 있다. 여기서 (A1), (A2)로 (A0)를 증명할 수 있다는 것을 알면 실질적으로는 (A1), (A2)만으로 충분하다는 것을 알 수 있다. 더 나아가서, 연역규칙으로 (A1), (A2)를 쉽게 증명할 수 있다. 하나 더 주목해야 할 점은, 연역규칙은 힐베르트 논리계를 변형하여 깊이를 고려하게 된다면, $f_{H,\phi}(\psi, H \cup \{\phi\}, s+1) = (\phi \rightarrow \psi, H, s)$같은 일종의 추론규칙들로 이해할 수 있다는 점이다.

힐베르트 논리계에 대해 가장 자연스런 평가규칙은 우선 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi)$는

$\phi \rightarrow \psi$	$Ev_I(\phi) = 0$	$Ev_I(\phi) = 1$
$Ev_I(\psi) = 0$	1	0
$Ev_I(\psi) = 1$	1	1

이다. 또한, 다음을 증명할 수 있다.

Proposition 1. 만일 어떤 f가 존재하여 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = f(Ev_I(\phi), Ev_I(\psi))$라면 평가규칙이 위 성질을 만족하는 것과 (A1), (A2), Modus ponens가 적절한 것은 동치이다.

Proof. 평가규칙이 위 성질을 만족할 때 (A1), (A2), Modus ponens가 적절한 것은 쉽게 확인할 수 있다. 우선, Modus ponens가 적절하다면 $Ev_I(\phi) = Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = 1$일 때 $Ev_I(\psi) = 1$이므로 $Ev_I(\phi) = 1$, $Ev_I(\psi) = 0$이라면 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = 0$이다. 만일 $Ev_I(\psi) = 1$이면서 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = 0$인 ϕ, ψ가 존재한다면 $Ev_I(\psi \rightarrow [\phi \rightarrow \psi]) = 0$이므로 (A1)이 적절하지 않다. 따라서 $Ev_I(\psi) = 1$이면 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = 1$이다. 마지막으로 $Ev_I(\phi \rightarrow \phi) = 1 = f(Ev_I(\phi), Ev_I(\phi))$로부터 $Ev_I(\phi) = Ev_I(\psi) = 0$이면 $Ev_I(\phi \rightarrow \psi) = 1$이 된다. □

여기서 $Ev_I(\phi \to \psi) = f(Ev_I(\phi), Ev_I(\psi))$라는 조건은 논리계에 있어서 자연스러운 조건이다. 같은 구조의 논리식이라면 같은 참거짓 판정을 받아야할 것이다. 그런 의미에서, 만일 평가규칙 Ev에 대해 어떤 f, g가 있어서 $Ev_I(\phi \to \psi) = f(Ev_I(\phi), Ev_I(\psi))$와 $Ev_I(\neg\phi) = g(Ev_I\phi))$를 만족한다면, 그러한 평가규칙 Ev를 자연스럽다(natural) 혹은 단순하다(simple)이라고 하자. 위의 정리로부터, 공리 (A1), (A2)를 적절하게 만드는 자연스러운 평가규칙에 대해 f는 유일하게 결정된다.

그렇다면 g는 어떻게 결정되어야 하는가? 가장 통상적인 것은 $g(0) = 1$, $g(1) = 0$일 것이다. ($g(0) = 1$은 실은 의심의 여지가 있다.) 공리적인 관점에서 이에 대응되는 것은 몇몇 있지만, 여기서는 대우명제의 동치성을 생각해보도록 한다. 즉

- $[\phi \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg\phi]$ (A3-a)
- $[\neg\psi \to \neg\phi] \to [\phi \to \psi]$ (A3-b)

이란 공리들을 생각할 수 있다. 여기서 놀랍게도, 만일 (A1), (A2)가 공리로 주어져 있다면, (A3-b)로 (A3-a)를 증명할 수 있지만 (A3-a)로는 (A3-b)를 증명할 수 없다. 이를 보이기 위해 우선 (A3-b)로부터

$$
\begin{aligned}
&\vdash \neg\neg\phi \to [\neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi]\\
\neg\neg\phi &\vdash \neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi\\
\neg\neg\phi &\vdash [\neg\neg\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi] \to [\neg\phi \to \neg\neg\neg\phi]\\
\neg\neg\phi &\vdash \neg\phi \to \neg\neg\neg\phi\\
\neg\neg\phi &\vdash [\neg\phi \to \neg\neg\neg\phi] \to [\neg\neg\phi \to \phi]\\
\neg\neg\phi &\vdash \neg\neg\phi \to \phi\\
\neg\neg\phi &\vdash \neg\neg\phi\\
\neg\neg\phi &\vdash \phi\\
&\vdash \neg\neg\phi \to \phi
\end{aligned}
$$

을 얻는다. 이제 (A3-b)에서 (A3-a)를 증명하는 것은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash \neg\neg\phi \to \phi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \phi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \phi \to \psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash [\neg\neg\neg\psi \to \neg\psi] \to [\psi \to \neg\neg\psi]\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \neg\neg\neg\psi \to \neg\psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \psi \to \neg\neg\psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi, \neg\neg\phi &\vdash \neg\neg\psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash \neg\neg\phi \to \neg\neg\psi\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash [\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi] \to [\neg\psi \to \neg\phi]\\
\text{(A3-b)}, \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash \neg\psi \to \neg\phi
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\text{A3-b}), \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash \neg\psi \\
(\text{A3-b}), \neg\psi, \phi \to \psi &\vdash \neg\phi \\
(\text{A3-b}), \phi \to \psi &\vdash \neg\psi \to \neg\phi \\
(\text{A3-b}) &\vdash [\phi \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg\phi]
\end{aligned}$$

그렇다면 (A3-a)로 (A3-b)를 증명할 수 없다는 것은 어떻게 증명해야 할까? 추론규칙과 공리가 적절하다면 모든 정리가 적절하다는 것을 생각하면, (A1), (A2), Modus ponens, (A3-a)는 적절하지만 (A3-b)는 적절하지 않은 추론규칙이 존재한다는 것을 보이면 충분하다. 추론규칙 Ev가 단순하여 f, g가 존재하고 (A1), (A2), Modus ponens가 적절하다고 가정하면 **Proposition 1.**에 의해 f는 유일하게 결정된다. 여기서 $g(0) = g(1) = 0$인 추론규칙을 고려하자. 그렇다면 $Ev_I(\neg\psi) = g(Ev_I(\psi)) = 0$을 항상 만족하므로 $Ev_I(\neg\psi \to \neg\phi) = f(Ev_I(\neg\psi), Ev_I(\neg\phi)) = f(0, Ev_I(\neg\phi)) = 1$. 따라서 $Ev_I([\phi \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg\phi]) = f(Ev_I(\phi \to \psi), Ev_I(\neg\psi \to \neg\phi)) = f(Ev_I(\phi \to \psi), 1) = 1$ 이므로 (A3-a)는 적절하다. 하지만 명제소 p, q와 배정 $I(p) = 1$, $I(q) = 0$을 생각하면, $Ev_I(p \to q) = 0$이고 $Ev_I(\neg q \to \neg p) = 1$이므로 $Ev_I([\neg q \to \neg p] \to [p \to q]) = 0$이 되어 (A3-b)는 적절하지 않게 된다. 따라서 (A3-a)를 가정한다고 해서 (A3-b)를 증명할 수는 없다. 여기에 더 나아가서, 다음을 증명할 수 있다.

Proposition 2. 만일 평가규칙 Ev이 단순하고 (A1), (A2), Modus ponens가 적절하다면, (A3-b)가 적절한 것과 $g(0) = 1$, $g(1) = 0$인 것은 동치이다.

Proof. 만일 $g(0) = 1$, $g(1) = 0$이면 (A3-b)가 적절한 것은 쉽게 확인할 수 있다. 이제 (A3-b)가 적절하다고 하자. 우선 **Proposition 1.**에 의해 f가 유일하게 결정된다. 명제소 p, q와 $I(p) = 1$, $I(q) = 0$을 만족하는 배정 I를 생각하자. 그렇다면 $Ev_I(p \to q) = 0$이므로 (A3-b)가 적절하다는 것으로부터 $Ev_I([\neg q \to \neg p] \to [p \to q]) = f(Ev_I(\neg q \to \neg p), 0) = f(f(g(0), g(1)), 0) = 1$. 따라서 $f(g(0), g(1)) = 0$이고 $g(0) = 1$, $g(1) = 0$이다. □

즉, Modus ponens와 공리꼴 $AX = \{$(A1), (A2), (A3-b)$\}$는 적절한 단순 평가규칙 EV를 유일하게 결정한다. 더 나아가서,

Theorem 3. 명제논리계 (L, W, In, AX, EV)는 적절하고 완전하다.

가 성립한다. 이를 위해서는 우선 다음 사실이 필요하다.

Lemma 4. 임의의 $\phi, \psi \in W$에 대해 AX가 공리에 포함된다면

$$\begin{aligned}
\phi, \neg\phi &\vdash \psi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash \psi \\
\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi &\vdash \psi
\end{aligned}$$

Proof. 증명은 다음과 같다

$$
\begin{aligned}
&\vdash \neg\phi \to [\neg\psi \to \neg\phi] \\
\neg\phi &\vdash \neg\psi \to \neg\phi \\
\neg\phi &\vdash [\neg\psi \to \neg\phi] \to [\phi \to \psi] \\
\neg\phi &\vdash \phi \to \psi \\
\phi, \neg\phi &\vdash \psi \quad \square \\
&\vdash \neg\phi \to [\phi \to \psi] \\
&\vdash \neg\phi \to [\phi \to \neg[\phi \to \phi]] \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \neg\psi \to \phi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \neg\psi \to \neg\phi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \neg\psi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \phi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \neg\phi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \phi \to \neg[\phi \to \phi] \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi, \neg\psi &\vdash \neg[\phi \to \phi] \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash \neg\psi \to \neg[\phi \to \phi] \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash [\neg\psi \to \neg[\phi \to \phi]] \to [[\phi \to \phi] \to \psi] \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash [\phi \to \phi] \to \psi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash \phi \to \phi \\
\neg\psi \to \phi, \neg\psi \to \neg\phi &\vdash \psi \quad \square \\
&\vdash [\neg\psi \to \phi] \to [[\neg\psi \to \neg\phi] \to \psi] \\
&\vdash [\phi \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg\phi] \\
\phi \to \psi &\vdash \neg\psi \to \neg\phi \\
\neg\phi \to \psi &\vdash \neg\psi \to \neg\neg\phi \\
\neg\phi \to \psi, \neg\psi &\vdash \neg\neg\phi \\
\neg\phi \to \psi, \neg\psi &\vdash \neg\neg\phi \to \phi \\
\neg\phi \to \psi, \neg\psi &\vdash \phi \\
\neg\phi \to \psi &\vdash \neg\psi \to \phi \\
\neg\phi \to \psi &\vdash [\neg\psi \to \neg\phi] \to \psi \\
\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi &\vdash \psi
\end{aligned}
$$

□

또, 다음 사실이 필요하다.

Lemma 5. 임의의 $\phi, \psi \in W$에 대해 AX가 공리에 포함된다면

$$
\begin{aligned}
\phi, \psi &\vdash \phi \to \psi \\
\neg\phi, \psi &\vdash \phi \to \psi
\end{aligned}
$$

$$\phi, \neg\psi \vdash \neg[\phi \to \psi]$$
$$\neg\phi, \neg\psi \vdash \phi \to \psi$$

Proof. 처음 두 개는 $\vdash \psi \to [\phi \to \psi]$이므로 $\psi \vdash \phi \to \psi$이 되어서 성립한다. 마지막은 $\neg\phi, \phi \vdash \psi$ 에서 $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$이므로 성립한다. 세번째는

$$\begin{aligned}
\phi, \phi \to \psi &\vdash \phi \\
\phi, \phi \to \psi &\vdash \phi \to \psi \\
\phi, \phi \to \psi &\vdash \psi \\
\phi &\vdash [\phi \to \psi] \to \psi \\
\phi &\vdash [[\phi \to \psi] \to \psi] \to [\neg\psi \to \neg[\phi \to \psi]] \\
\phi &\vdash \neg\psi \to \neg[\phi \to \psi] \\
\phi, \neg\psi &\vdash \neg[\phi \to \psi]
\end{aligned}$$

이므로 성립한다. □

임의의 $\phi \in W$에 대해 A_ϕ를 ϕ에 등장하는 명제소들의 집합이라고 하고, 임의의 배정 I에 대해 $\phi_I = \begin{cases} \phi & EV_I(\phi) = 1 \\ \neg\phi & EV_I(\phi) = 0 \end{cases}$ 라 정의하자. 그렇다면 다음이 성립한다.

Theorem 6. 임의의 $\phi \in W$에 대해

$$A_{\phi,I} = \{p_I \mid p \in A_\phi\} \vdash \phi_I$$

Proof. 우선, $\phi \in A$라면 자명하다.

만일 $\phi = \neg\psi$이고 주어진 명제가 ψ에 대해서 참이라면, $A_\phi = A_\psi$. 여기서 $EV_I(\phi) = 1$인 경우에는 $EV_I(\psi) = 0$이므로 $\phi_I = \phi = \neg\psi = \psi_I$이므로 $A_{\phi,I} = A_{\psi,I} \vdash \psi_I = \phi_I$이므로 성립. 반대로 $EV_I(\phi) = 0$인 경우에는 $EV_I(\psi) = 1$이므로 $\phi_I = \neg\phi = \neg\neg\psi = \neg\neg\psi_I$. 여기서

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg\neg\neg\psi_I \to \neg\psi_I \\
&\vdash [\neg\neg\neg\psi_I \to \neg\psi_I] \to [\psi_I \to \neg\neg\psi_I] \\
&\vdash \psi_I \to \neg\neg\psi_I \\
A_{\phi,I} = A_{\psi,I} &\vdash \psi_I \\
A_{\phi,I} &\vdash \neg\neg\psi_I = \phi_I
\end{aligned}$$

따라서 참이다.

마지막으로 $\phi = \psi \to \eta$인 경우에 대해서는, 주어진 명제가 ψ, η에 대해서 참일 때, **Lemma 5.**에 의해

$$\psi_I, \eta_I \vdash [\psi \to \eta]_I = \phi_I$$

가 성립하므로

$$\begin{aligned}
&\vdash \psi_I \to [\eta_I \to \phi_I] \\
A_{\psi,I} &\vdash \psi_I \\
A_{\eta,I} &\vdash \eta_I \\
A_{\psi,I} &\vdash \eta_I \to \phi_I \\
A_{\phi,I} = A_{\psi,I} \cup A_{\eta,I} &\vdash \phi_I
\end{aligned}$$

가 성립한다.

따라서 모든 명제 ϕ와 배정 I에 대해 $A_{\phi,I} \vdash \phi_I$. □

그럼 이제 **Theorem 3.**을 증명할 수 있다.

Proof. 임의의 뻔한명제 ϕ가 정리임을 보이면 된다. 임의의 I와 $X \subseteq A_{\phi,I}$에 대해 $|X| = k$이면 $X \vdash \phi$라고 가정하자. $k = |A_\phi|$이면 어떤 I가 존재하여 $X = A_{\phi,I}$이다. 여기서 ϕ가 뻔한명제라는 것으로부터 $\phi_I = \phi$이다. 따라서 $A_{\phi,I} \vdash \phi$이므로 성립한다. 이제 $|X| = k \geq |A_\phi|$인 모든 주어진 X에 대해 성립한다면, $|X| = k-1$일 때, 어떤 I가 존재하여 $X \subseteq A_{\phi,I}$. 여기서 $|X| < A_\phi$이므로 $p, \neg p \notin X$인 $p \in A_\phi$가 존재한다. 또한, 배정 I_T, I_F가 존재하여 $X \subseteq A_{\phi,I_T}$,$X \subseteq A_{\phi,I_F}$이고 $I_T(p) = 1$, $I_F(p) = 0$을 만족한다. 이제 가정에 의해 $X \cup \{p\} \subseteq A_{\phi,I_T}$이고 $|X \cup \{p\}| = k$이므로 $X \cup \{p\} \vdash \phi$. 마찬가지로 $X \cup \{\neg p\} \vdash \phi$. 여기에 **Lemma 4.**를 이용하면

$$\begin{aligned}
&X \vdash p \to \phi \\
&X \vdash \neg p \to \phi \\
&X \vdash [p \to \phi] \to [[\neg p \to \phi] \to \phi] \\
&X \vdash [\neg p \to \phi] \to \phi \\
&X \vdash \phi
\end{aligned}$$

따라서 임의의 그러한 $|X| = k-1$에 대해 $X \vdash \phi$. 따라서 이는 $|X| = 0$일 때도 성립하고, 이는 곧 $\vdash \phi$이다. □

이로부터, (L, W, In, AX, EV)하에서는 $\vdash \phi$을 만족하는 것과 모든 I에 대해 $EV_I(\phi) = 1$을 만족하는 것이 동치라는 것을 알 수 있다. 그렇다면, $H \vdash \phi$와 동치인 어떤 조건을 찾을 수 있을까? 단순하게 생각해보면, 모든 $\psi \in H$에 대해 $EV_I(\psi) = 1$이라면 EV는 AX와 In을 적절하게 만드는 평가규칙이므로 $EV_I(\phi) = 1$이 될 것이다. 여기서 $H \vDash \phi$를 $EV_I(H) = \{1\}$이면 $EV_I(\phi) = 1$이라고 정의하고, 이런 경우 ϕ를 H로부터의 의미적 결론(logical semenatic consequence)라고 부르자. 그럼 다음이 성립한다.

Theorem 7. 명제논리계 (L, W, In, AX, EV)하에서 임의의 $H \subseteq W$에 대해 다음이 성립한다.

(a) 임의의 명제 ϕ에 대해 $\{\phi, \neg\phi\} \not\subseteq \mathrm{Th}(H \cup AX)$인 것과 어떤 배정 I가 존재하여 $EV_I(H) = \{1\}$인 것은 동치이다.

(b) 임의의 명제 ϕ에 대해 $H \vdash \phi$와 $H \vDash \phi$는 동치이다.

Proof. (a) 우선 어떤 배정 I가 존재하여 $EV_I(H) = \{1\}$이고 $H \vdash \phi, \neg\phi$라면 $EV_I(\phi) = EV_I(\neg\phi) = 1$이므로 모순. 따라서 $H \vdash \phi, \neg\phi$라면 $EV_I(H) = \{1\}$이 되게 하는 배정은 존재하지 않는다.

반대 경우를 위해서는, 일단 $\phi, \neg\phi \vdash \psi$로부터 $H \vdash \phi, \neg\phi$라면 임의의 명제 ψ에 대해 $H \vdash \psi$가 성립한다. 이제 임의의 명제 ϕ에 대해 $\{\phi, \neg\phi\} \not\subseteq \mathrm{Th}(H \cup AX)$라면, $H \subseteq \overline{H}$을 해당 성질을 유지하면서 극대집합이 되게 잡자(Zorn's Lemma). 이때, $\overline{H} \nvdash \phi$이고 $\overline{H} \nvdash \neg\phi$인 ϕ가 존재한다면, $\overline{H} \cup \{\phi\}, \overline{H} \cup \{\neg\phi\}$는 극대집합이라는 성질 때문에 해당 성질을 만족하지 않는다. 따라서 $\overline{H} \cup \{\phi\} \vdash \neg[\phi \to \phi]$이고 $\overline{H} \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg[\phi \to \phi]$이다. 이로부터 $\overline{H} \vdash \phi \to \neg[\phi \to \phi]$이고 $\overline{H} \vdash \neg\phi \to [\phi \to \phi]$이다. 여기서 **Lemma 4.**에 의해 $\phi \to \neg[\phi \to \phi], \neg\phi \to \neg[\phi \to \phi] \vdash \neg[\phi \to \phi]$임을 이용하면 $\overline{H} \vdash \neg[\phi \to \phi]$를 얻는다. 하지만 $\overline{H} \vdash [\phi \to \phi]$는 항상 성립하고, 이는 $\overline{H}$의 정의에 모순. 따라서 $\overline{H}$에 대해 $\overline{H} \vdash \phi$이거나 $\overline{H} \vdash \neg\phi$가 성립한다. 또한, 극대성에 의해 $\mathrm{Th}(\overline{H}) = \overline{H}$이다.

이제 배정 I^*를 $p \in \overline{H} \cap A$면 $I^*(p) = 1$, 아니면 $I^*(p) = 0$으로 정의하자. 즉, $p \in A$에 대해 $I^*(p) = 1$와 $p \in \overline{H}$가 동치이다. 이게 ϕ에 대해 $\phi \in \overline{H}$와 $EV_{I^*}(\phi) = 1$이 동치라면

$$\begin{aligned} \neg\phi \in \overline{H} &\Leftrightarrow \phi \notin \overline{H} \\ &\Leftrightarrow EV_{I^*}(\phi) = 0 \\ &\Leftrightarrow EV_{I^*}(\neg\phi) = 1 \end{aligned}$$

이므로 $\neg\phi$에 대해서도 두 명제는 동치가 된다. 또, ϕ, ψ에 대해서 둘이 동치라면

$$\begin{aligned} EV_{I^*}(\phi \to \psi) = 0 &\Leftrightarrow EV_{I^*}(\phi) = 1, EV_{I^*}(\psi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi, \neg\psi \in \overline{H} \end{aligned}$$

그럼 일단 $\phi, \neg\psi \in \overline{H}$면 **Lemma 5.**에 의해 $\phi, \neg\psi \vdash \neg[\phi \to \psi]$이므로 $\neg[\phi \to \psi] \in \overline{H}$이다. 더 나아가서, $\neg[\phi \to \psi] \to \phi$와 $\neg[\phi \to \psi] \to \neg\psi$가 뻔함은 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $\vdash \neg[\phi \to \psi] \to \phi$이고 $\vdash \neg[\phi \to \psi] \to \neg\psi$이므로 $\neg[\phi \to \psi] \in \overline{H}$라면 $\phi, \neg\psi \in \overline{H}$. 즉 $EV_{I^*}(\phi \to \psi) = 0$과 $\neg[\phi \to \psi] \in \overline{H}$가 동치이고, $EV_{I^*}(\phi \to \psi) = 1$과 $\phi \to \psi \in \overline{H}$도 동치이다. 즉 임의의 명제에 대해 $EV_{I^*}(\phi) = 1$과 $\phi \in \overline{H}$가 동치이다. 즉 $EV_{I^*}(\overline{H}) = \{1\}$이고 $H \subseteq \overline{H}$이므로 $EV_{I^*}(H) = 1$도 성립한다. □

(b) 앞에서 논의하였듯 $H \vdash \phi$이면 $H \vDash \phi$이다. 이제 $H \vDash \phi$라면 임의의 I에 대해, $EV_I(H) = \{1\}$이면 $EV_I(\neg\phi) = 0$이므로 어떤 배정 I에 대해서도 $EV_I(H \cup \{\neg\phi\}) \neq \{1\}$이다. 따라서 어떤 명제 $\psi, \neg\psi$가 존재하여 $H \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi, \neg\psi$이고, 따라서 $H \vdash \neg\phi \to \psi, \neg\phi \to \neg\psi$이다. 여기에 **Lemma 4.**에서 $\neg\phi \to \psi, \neg\phi \to \neg\psi \vdash \phi$임을 사용하면 $H \vdash \phi$를 얻는다. □

References

[1] Peter J. Cameron, *Sets, Logic and Categories*, Springer (1998).

[2] Joel W. Robbin, *Mathematical Logic: a first course*, W.A.Benjamin (1969).