부정과 함의를 지닌 명제논리계에서 항진명제의 비율 계산하기

엄태현

KAIST

2018.11.23

명제논리계

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$
- 논리 연산자
- 논리 연산자의 진리표
- 공리
- 추론 규칙

명제논리계

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$
- 논리 연산자

$\left.\begin{array}{l}\text{변수 : } x_0, x_1, \cdots \\ \text{논리 연산자}\end{array}\right\} \rightarrow$ 논리식

- 논리 연산자의 진리표
- 공리
- 추론 규칙

명제논리계

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$
- 논리 연산자

$\left.\begin{array}{l} \text{변수} : x_0, x_1, \cdots \\ \text{논리 연산자} \end{array}\right\} \rightarrow$ 논리식

- 논리 연산자의 진리표 $\rightarrow$ 항진명제
- 공리
- 추론 규칙

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$ } → 논리식
- 논리 연산자 } → 논리식
- 논리 연산자의 진리표 → 항진명제
- 공리 } → 정리
- 추론 규칙 } → 정리

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$
- 논리 연산자 : $\neg$(부정), $\rightarrow$(함의), $\wedge$(그리고), $\vee$(또는), $\cdots$
- 진리표
- 공리
- 추론 규칙 : 전언 긍정, $\cdots$

명제논리계

- 변수 : $x_0, x_1, \cdots$
- 논리 연산자 : ¬(부정), →(함의)
- 진리표
- 공리 : $\begin{cases} \phi \to \psi \to \phi \\ [\phi \to [\psi \to \eta]] \to [\phi \to \psi] \to \phi \to \eta \\ [\neg\psi \to \neg\phi] \to \phi \to \psi \end{cases}$
- 추론 규칙 : 전언 긍정

- 함의의 진리표

$p \rightarrow q$	q : 참	q : 거짓
p : 참	참	거짓
p : 거짓	참	참

- 부정의 진리표

	p : 참	p : 거짓
$\neg p$	거짓	참

$$\#\{\text{항진명제}\} = ?$$

항진명제

$$\frac{\#\{\text{항진명제}\}}{\#\{\text{논리식}\}} = ?$$

변수가 m개 일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{\text{길이 } n\text{인 항진명제}\}}{\#\{\text{길이 } n\text{인 논리식}\}} = ?$$

선행 결과

- 변수가 1개 일 때 (M. Zaionc, 2005)

$$\frac{1}{4\sqrt{13}} + \frac{1}{4\sqrt{17}} + \frac{1}{2\sqrt{2(\sqrt{221}-9)}} + \frac{15}{2\sqrt{442(\sqrt{221}-9)}}$$

- 변수가 m개, 논리식의 부정 대신 부정변수 도입 (H. Fournier, D. Gardy, A. Genitrini and M. Zaionc, 2010)

$$(7/8)m^{-1} + O(m^{-2})$$

- 변수가 1개, 함의 대신 ‘그리고’ 도입 (L. Aszalós and T. Herendi, 2012)

$$\frac{12 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{24\sqrt{4-\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

- 변수가 1개, 오직 ‘둘 다는 아니다(nand)’만 존재 (L. Aszalós and T. Herendi, 2012)

$$\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 6}{6\sqrt{7-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}}$$

목표

- 변수의 개수가 작을 때 실제 극한값
- 단순히 개수를 비교하는 것보다 더 빨리 극한값에 수렴시키는 방법
- 변수의 개수가 무한대로 갈 때 점근적 경향

목표

- 변수의 개수가 작을 때 실제 극한값 → 대수적 접근
- 단순히 개수를 비교하는 것보다 더 빨리 극한값에 수렴시키는 방법
- 변수의 개수가 무한대로 갈 때 점근적 경향

→ 해석적 접근

만일 두 생성함수 $U(x), V(x)$가 $x_0 \in \mathbb{R}$에서 특이점을 가지고, $|x| \le |x_0|$ 내에 다른 특이점이 없을 때,

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{n/2}, \quad V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{n/2}$$

이면서 $\hat{v}_1 \neq 0$이면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]U(x)}{[x^n]V(x)} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{v}_1}.$$

※실제로 $\hat{u}_1$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{u}_1 = \lim_{x\to x_0^-} \frac{U(x) - U(x_0)}{\sqrt{1 - \frac{x}{x_0}}} = -\lim_{x\to x_0^-} 2x_0 U'(x)\sqrt{1 - \frac{x}{x_0}}.$$

항진명제의 생성함수

- $X = \{x_0, \cdots, x_{m-1}\}$: 변수들의 집합
- $WFF(X)$: X를 변수로 가지는 논리식들의 집합
- $\ell : WFF(X) \to \mathbb{N}$: 논리식의 길이(사용된 변수와 논리연산자 개수의 합)
- $W(x) = \sum_{\phi \in WFF(X)} x^{\ell(\phi)}$
- $V_T : WFF(X) \to \{0(\text{거짓}), 1(\text{참})\}$: $T \subseteq X$에 대해, T가 참이고 T^c가 거짓일 때 논리식의 참 거짓 판정
- F_ϕ : 논리식 ϕ에 대해 $V_T(\phi) = 0$인 T들의 집합
- $I_A(x) = \sum_{F_\phi = A} x^{\ell(\phi)}$

항진명제의 생성함수

- $F_\phi \to F_\psi := F_{\phi\to\psi} = F_\psi \setminus F_\phi$
- $\neg F_\phi := F_{\neg\phi} = F_\phi^c$
- $F_\phi \vee F_\psi := F_{\phi\vee\psi} = F_\phi \cap F_\psi$
- $F_\phi \wedge F_\psi := F_{\phi\wedge\psi} = F_\phi \cup F_\psi$
- $I_\emptyset(x)$: 항진명제의 생성함수
- $A = F_{x_i}$ 면

$$I_A(x) = x + xI_{A^c}(x) + x \sum_{C \setminus D = A} I_C(x) I_D(x).$$

- 그 외에는

$$I_A(x) = xI_{A^c}(x) + x \sum_{C \setminus D = A} I_C(x) I_D(x).$$

$|\{F_\phi \mid \phi \in WFF(X)\}| = |\mathcal{P}\mathcal{P}X| = 2^{2^m}$

$\mathcal{P}\mathcal{P}X$의 '적절한 분할' $\{P_1, \cdots, P_k\}$란?
분할이 논리 연산자에 대해 일종의 "coset"을 구성.
$\Leftrightarrow$ 논리 연산자가 P_i들에 대해 잘 정의됨.
$\Leftrightarrow$ P_ϕ를 F_ϕ를 포함하는 P_i라고 하면 $P_\phi = P_{\phi'}$이고 $P_\psi = P_{\psi'}$일 때 $P_{\phi\to\psi} = P_{\phi'\to\psi'}, \cdots$.

‘적절한 분할’의 예시

- $A \cap B = \emptyset$인 $A, B \subseteq \mathcal{P}X$에 대해

$$P_{A;B} := \{A \cup Y \mid Y \subseteq B\} = \{C \subseteq \mathcal{P}X \mid C \setminus B = A\}$$

- $P_{;B} = \{P_{A;B} \mid A \cap B = \emptyset\}$: $\mathcal{P}\mathcal{P}X$의 균등분할
- 이는 $A \sim_B C \Leftrightarrow A \setminus B = C \setminus B \Leftrightarrow A \cup B = C \cup B$로 정의된 동치관계와 동일
- 일반적으로

$$P_{A;B} := P_{A \setminus B;B} = \{Y \mid A \setminus B \subseteq Y \subseteq A \cup B\}$$

'적절한 분할'의 예시

- $\{Y^c \mid Y \in P_{A;B}\} = P_{A^c;B}$
- $\{Y \setminus Z \mid Y \in P_{A;B}, Z \in P_{C;B}\} = P_{A \setminus C;B}$
- $\{Y \cap Z \mid Y \in P_{A;B}, Z \in P_{C;B}\} = P_{A \cap C;B}$
- $\{Y \cup Z \mid Y \in P_{A;B}, Z \in P_{C;B}\} = P_{A \cup C;B}$

2^{2^m}계 연립방정식 풀기

- $I_{A;B}(x) := \sum_{C \in P_{A;B}} I_C(x)$
- $m_{A;B} := \#\{F_{x_i} \in P_{A;B}\}$
- $I_{A;B}(x) =$

$$m_{A;B}x + xI_{A^c;B} + x \sum_{\substack{C \setminus D = A \setminus B \\ C \cap B = D \cap B = \emptyset}} I_{C;B}(x) I_{D;B}(x)$$

- 이차항의 개수 $= 3^{2^m - |A \cup B|}$

2^{2^m}계 연립방정식 풀기

- 만일 $y \notin A \cup B$면 $I_{A;B} = I_{A;B \cup \{y\}} - I_{A \cup \{y\};B}$
- $I_{A;B}$: $I_{B^c;B}$, $I_{C;B'}$ $(A \subseteq C,\ B \subseteq B',\ |B'| = |B| + 1)$의 선형결합
- $I_{A;B}$: $I_{B'^c;B'}$, $(B \subseteq B',\ (A \setminus B) \cap B' = \emptyset)$의 선형결합

2^{2^m}계 연립방정식 풀기

- $P_{-;B} := P_{B^c;B}$, $I_{-;B} := I_{B^c;B}$
- $P_{-;B'} \cap P_{-;B''} = P_{-;B' \cap B''}$
- 만일 $A \cap B = \emptyset$이면

$$P_{A;B} = P_{-;A^c} \setminus \left(\bigcup_{y \notin A \cup B} P_{-;(A \cup \{y\})^c} \right)$$

- 만일 $A \cap B = \emptyset$이면

$$I_{A;B}(x) = (-1)^{|A|} \sum_{B \subseteq B' \subseteq A^c} (-1)^{|B'|} I_{-;B'}(x)$$

2^{2^m}계 연립방정식 풀기

- $I_{-;B}(x) = m_{-;B}x + xI_{\emptyset;B}(x) + xI_{-;B}(x)I_{\emptyset;B}(x)$
- $I_{\emptyset;B}(x) = \sum_{B\subseteq B'}(-1)^{|B'|}I_{-;B'}(x)$
- $\sigma_B := (-1)^{|B|}$
- $I_B^{\uparrow}(x) := \sum_{B\subsetneq B'}\sigma_{B'}I_{-;B'}(x)$
- $I_{-;B}(x) =$

$$\frac{1-(\sigma_B+I_B^{\uparrow}(x))x-\sqrt{(1-(\sigma_B+I_B^{\uparrow}(x))x)^2-4\sigma_B x^2(m_{-;B}+I_B^{\uparrow}(x))}}{2x\sigma_B}$$

비율 구하기

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]I_{A;B}(x)}{[x^n]W(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0^-} 2x_0 I'_{A;B}(x)\sqrt{1-\frac{x}{x_0}}}{\lim_{x\to x_0^-} 2x_0 W'(x)\sqrt{1-\frac{x}{x_0}}}$$

- $W(x) = \frac{1-x-\sqrt{(1-(2\sqrt{m}+1)x)(1+(2\sqrt{m}-1)x)}}{2x} = I_{-;\mathcal{P}X}$
- 특이점 $x_0 = \frac{1}{2\sqrt{m}+1}$

비율 구하기

- $x_0 = \frac{1}{2\sqrt{m}+1}$
- $\alpha_B := I_{-;B}(x_0)$
- $\alpha_B^{\uparrow} := \sum_{B \subsetneq B'} (-1)^{|B'|} \alpha_{B'}$
- $\beta_B := \lim_{x \to x_0^-} 2x_0 I'_{-;B}(x) \sqrt{1 - \frac{x}{x_0}}$
- $\beta_B^{\uparrow} := \sum_{B \subsetneq B'} (-1)^{|B'|} \beta_{B'}$
- $d_B := (1/x_0 - \sigma_B - \alpha_B^{\uparrow})^2 - 4\sigma_B(m_{-;B} + \alpha_B^{\uparrow})$

비율 구하기

- 임의의 B에 대해

$$\alpha_B = \frac{1/x_0 - \sigma_B - \alpha_B^{\uparrow} - \sqrt{d_B}}{2\sigma_B}$$

- 만일 d_B가 0이 아니라면

$$\beta_B = \beta_B^{\uparrow} \frac{-1 + (1/x_0 + \sigma_B - \alpha_B^{\uparrow})/\sqrt{d_B}}{2\sigma_B}$$

- $\alpha_{\mathcal{P}X} = \sqrt{m}$, $\beta_{\mathcal{P}X} = \sqrt{2m + \sqrt{m}}$
- $A \cap B = \emptyset$이면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n] I_{A;B}(x)}{[x^n] W(x)} = \frac{\sigma_A \sum_{B \subseteq B' \subseteq A^c} \sigma_{B'} \beta_{B'}}{\sqrt{2m + \sqrt{m}}}$$

항진명제의 비율

$$\text{항진명제 비율의 극한} = \lim_{n\to\infty} \frac{[x^n] I_\emptyset(x)}{[x^n] W(x)} = \frac{\sum_{B \subseteq \mathcal{P}(X)} \sigma_B \beta_B}{\sqrt{2m + \sqrt{m}}}$$

- $m = 1 : 0.42324\cdots$
- $m = 2 : 0.33213\cdots$
- $m = 3 : 0.27003\cdots$
- $m = 4 : 0.22561\cdots$

실제 값과 비교

변수가 1개일 때

- 극한값 : $0.4232385\cdots$
- $n = 10$: $0.3101796\cdots$
- $n = 100$: $0.4187317\cdots$
- $n = 1000$: $0.4227880\cdots$
- $n = 10000$: $0.4231935\cdots$

해석적 접근

멱급수 $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$가 만족하는 조건

- $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{1}{r} > 1$
- $T(x) = f(x) + g(x)T(x) + h(x)T(x)^2$
- f : 멱급수
- g, h : 다항식
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{T_n} = \gamma$

$$1 = \frac{f_n}{T_n} + \sum_{u=0}^{\deg g} g_u \frac{T_{n-u}}{T_n} + \sum_{u=0}^{\deg h} \sum_{v=0}^{n-u} h_u \frac{T_v T_{n-u-v}}{T_n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{u=0}^{\deg h} \sum_{v=s+1}^{n-u-s-1} h_u \frac{T_v T_{n-u-v}}{T_n} &\simeq 1 - \gamma - g(r) - 2h(r) \sum_{k=0}^{s} T_k r^k \\ &= 1 - \gamma - g(r) - 2h(r) T^{\leq s}(r) =: t_s\end{aligned}$$

멱급수 $A_1, \cdots, A_N$이 만족하는 조건

- $\lim_{n\to\infty} \frac{A_{in}}{T_n} = \beta_i$
- $A_i(x) = f_i(x) + \sum_j g_{ij}(x)A_j(x) + h(x)\sum_{j,k} h_{ijk}(x)A_j(x)A_k(x)$
- f_i : 멱급수
- g_{ij}, h_{ijk} : 다항식
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{in}}{T_n} = \gamma_i$

$$
\begin{aligned}
\beta_i \simeq & \gamma_i + \sum_j g_{ij}(r)\beta_j \\
& + h(r)\sum_{j,k} h_{ijk}(r)(A_j^{\leq s}(r)\beta_k + A_k^{\leq s}(r)\beta j) \\
& + \sum_{j,k} t_s h_{ijk}(r)\beta_j\beta_k
\end{aligned}
$$

s-절단 연산자

- 앞의 조건을 만족하는 $T, A_1, \cdots, A_N$에 대해 s-절단 연산자 $C_s(x_1, \cdots, x_N) = (c_1, \cdots, c_N)$를 다음과 같이 정의.

$$\begin{aligned} c_i =& \gamma_i + \sum_j g_{ij}(r)x_j \\ & + h(r)\sum_{j,k} h_{ijk}(r)(A_j^{\leq s}(r)x_k + A_k^{\leq s}(r)x_j) \\ & + \sum_{j,k} t_s h_{ijk}(r)x_jx_k \end{aligned}$$

- C_s의 고정점 : s-절단 해
- $\lim_{s\to\infty} t_s =: t_\infty = 1 - \gamma - g(r) - 2h(r)T(r)$.

- 만일 T, h의 계수에 음수가 없고 $T(r)$이 존재하면

$$\beta = \lim_{s\to\infty} C_s(\beta).$$

- 만일 T, g, h의 계수에 음수가 없고 h가 0이 아니고 $f(r), T(r), A_1(r), \cdots, A_N(r)$이 존재하고, $t_\infty = 0$이라면

$$\begin{aligned}\beta_i =& \gamma_i + \sum_j g_{ij}(r)\beta_j \\ &+ h(r)\sum_{j,k} h_{ijk}(r)(A_j(r)\beta_k + A_k(r)\beta_j).\end{aligned}$$

$A_1, \cdots, A_N$이 T의 ‘자연스런 분할’ :

- $T(x) = \sum_i A_i(x)$
- $f(x) = \sum_i f_i(x)$
- $g(x) = \sum_i g_{ij}(x)$
- $2 = \sum_i (h_{ijk}(x) + h_{ikj}(x))$

만일 $T, A_1, \cdots, A_N, g, h, g_{ij}, g_{ijk}$들의 계수와 γ, γ_i가 음이 아니라면 분할이 음이 아니라고 한다.

- t_s가 0이 아니면 s-절단 해 $(x_1, \cdots, x_N)$에 대해 $\sum_i x_i = \gamma / t_s$ 거나 $\sum_i x_i = 1$
- $H := \{(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid 0 \le x_i \le 1, \sum_i x_i = 1\}$에 적어도 하나의 s-절단 해가 존재
- H에서 s-절단 연산자가 축소사상이면 H 위의 유일한 s-절단 해 β^s가 존재
- 모든 s에 대해 $x, y \in H$일 때 $|C_s(x) - C_s(y)| \le K|x - y|$인 공통적인 $K < 1$이 존재한다면 $\beta^s \to \beta$

변형된 s-절단 연산자

음이 아닌 자연스런 분할에 대해 C_s의 자코비안을 J_s라 하면,

- $x \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$일 때 $\|J_s(x)\|_1 = 1 - t_s - \gamma + 2t_s(\sum_i x_i)$
- $x \in H$일 때 $\|J_s(x)\|_p \geq 1 - \gamma + t_s$

v만큼 변형된 s-절단 연산자를 다음과 같이 정의.

$$\widetilde{C_s^v}(x) = C_s(x) + v\left(1 - \sum_i x_i\right) \cdot (1, 1, \cdots, 1)$$

- $x \in H$면 $\widetilde{C_s^v}(x) = C_s(x)$
- $\widetilde{J_s^v} = J_s - v\mathbf{1}$
- $v = \frac{1-\gamma+t_s}{N}$: 표준 변형 s-절단 연산자

실제 값과 s-절단 해 비교

변수가 1개일 때

- 극한값 : $0.4232385\cdots$
- $s = 10$: $0.4242620\cdots$
- $s = 100$: $0.4232740\cdots$
- $s = 1000$: $0.4232396\cdots$
- $s = 10000$: $0.4232386\cdots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]I_\emptyset(x)}{[x^n]W(x)} = \Omega(\frac{1}{m})$$

증명) 임의의 항진명제 ψ에 대해 $\neg\neg\psi$는 항진명제고, 임의의 변수 p와 논리식 ϕ에 대해 $p \to \phi \to p$는 항진명제이며, 두 모양은 공통 원소를 가지지 않으므로

$$[x^n]I_\emptyset(x) \geq [x^{n-2}]I_\emptyset(x) + m([x^{n-4}]W(x)).$$

여기서

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1 - x - \sqrt{(1-x)^2 - 4mx^2}}{2x} \\ &= \sqrt{m} - \sqrt{2m + \sqrt{m}}\sqrt{1 - (2\sqrt{m}+1)x} + O(1 - (2\sqrt{m}+1)x) \end{aligned}$$

이므로 $[x^n]W(x) \simeq \sqrt{\frac{2m+\sqrt{m}}{4\pi n^3}}(2\sqrt{m}+1)^n$.

따라서

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]I_\emptyset(x)}{[x^n]W(x)}$$

라면

$$\beta \ge \frac{\beta}{(2\sqrt{m}+1)^2} + \frac{m}{(2\sqrt{m}+1)^4}$$

이므로

$$\beta \ge \frac{\sqrt{m}}{4(\sqrt{m}+1)(2\sqrt{m}+1)^2}.$$

$\square$

※항위명제들의 생성함수 $I_{\mathcal{P}X}$에 대해서는 $\Omega(\frac{1}{m\sqrt{m}})$이다.

- 두 논리식 ϕ, ψ가 같은 모양 : 적당한 변수 재정렬 $\sigma \in S_X$가 존재하여 $\phi = \sigma\psi$
- $[\phi]$: ϕ와 같은 모양인 논리식들의 집합
- $\|\phi\|$: ϕ가 지닌 서로 다른 변수의 개수
- $|\phi| := \|\phi\| - \ell(\phi)/2$
- 항진명제와 모양이 같은 논리식은 항진명제
- 만일 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$을 $m^{\underline{k}}$이라고 하면

$$(\sum_{\psi \in [\phi]} x^{\ell(\psi)})(x_0) = \frac{m^{\underline{\|\phi\|}}}{(2\sqrt{m}+1)^{\ell(\phi)}} = \Theta(m^{|\phi|})$$

부정변수를 도입한 논리계(H. Fournier, D. Gardy, A. Genitrini and M. Zaionc, 2010)에서

- 1형 단순 항진명제 :

$$\phi_1 \to \cdots \to p \to \cdots \to p$$

- 2형 단순 항진명제 :

$$\phi_1 \to \cdots \to p \to \cdots \to \bar{p} \to \cdots \to q$$

- 1형 단순 항진명제 :

$$\phi_1 \to \cdots \to p \to \cdots \to p$$

- 2형 단순 항진명제 : ψ가 변수거나 $\neg\phi$ 꼴일 때,

$$\phi_1 \to \cdots \to p \to \cdots \to \neg p \to \cdots \to \psi$$
$$\phi_1 \to \cdots \to \neg p \to \cdots \to p \to \cdots \to \psi$$

$m \to \infty$

- 모든 논리식 ϕ에 대해 $|\phi| \le 1/2$
- 모든 항진명제 ϕ에 대해 $|\phi| \le -1/2$
- 모든 항위명제 ϕ에 대해 $|\phi| \le -1$
- 항진명제 ϕ가 $|\phi| = -1/2$라는 것은 ϕ가 1종 단순 항진명제이면서 변수 중복이 한 번밖에 일어나지 않고 부정을 포함하지 않는 것과 동치

항진명제로 이루어진 집합 Φ에 대해 Φ-항진, Φ-항위, Φ-모름을 다음과 같이 정의한다.

- $\phi \in \Phi$면 Φ-항진
- ϕ가 Φ-항진이면 $\neg\phi$는 Φ-항위
- ϕ가 Φ-모름이면 $\neg\phi$도 Φ-모름
- ϕ가 Φ-항위면 $\neg\phi$는 Φ-항진
- ϕ가 Φ-항위거나 ψ가 Φ-항진이면 $\phi \to \psi$는 Φ-항진
- ϕ가 Φ-항진이고 ψ가 Φ-항위면 $\phi \to \psi$는 Φ-항위
- 그 외에는 Φ-모름

만일 임의의 $\phi \in \Phi$에 대해 ϕ가 $\Phi \setminus \{\phi\}$-항진이 아니면 Φ를 기저적이라고 하고, Φ'이 기저적이면서 Φ-항진과 Φ'-항진이 일치하면 Φ'를 Φ의 기저라 한다.

Φ가 기저적이고 b가 Φ, T가 Φ-항진, U가 Φ-모름, A가 Φ-항위의 생성함수면

$$T(x) = b(x) + xA(x) + x(T(x)W(x) + A(x)W(x) - A(x)T(x))$$
$$U(x) = mx - b(x) + xU(x) + xU(x)W(x)$$
$$A(x) = xT(x) + xA(x)T(x)$$

- $p \to \phi_1 \to \cdots \to \phi_k \to p$꼴이고 $\phi_i \neq p$인 1형 단순 항진명제의 생성함수 :

$$\frac{mx^3}{1 + x^2 - xW(x)}$$

- $p \to \phi_1 \to \cdots \to \phi_k \to p$꼴이고 $\phi_i \neq p$인 1형 단순 항진명제의 기저의 생성함수 :

$$\frac{mx^3}{1 + x^2 - xW(x) + xA(x)}$$

Φ가 1형 단순 항진명제라면 다음 연립방정식을 만족.

$$
\begin{aligned}
b(x) &= mx^3 - x^2 b(x) + xW(x)b(x) - xA(x)b(x) \\
T(x) &= b(x) + xA(x) + x(T(x)W(x) + A(x)W(x) - A(x)T(x)) \\
U(x) &= mx - b(x) + xU(x) + xU(x)W(x) \\
A(x) &= xT(x) + xA(x)T(x)
\end{aligned}
$$

$x = x_0 = \frac{1}{2\sqrt{m}+1}$을 대입하고, b, T, U, A를 $\frac{1}{\sqrt{m}}$에 대한 로랑 급수로 추정하여 미정계수법을 통해 급수해를 구하면

$$
\begin{aligned}
b\left(\frac{1}{2\sqrt{m}+1}\right) &= \frac{1}{4\sqrt{m}} - \frac{1}{2m} + \cdots \\
T\left(\frac{1}{2\sqrt{m}+1}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{1}{m} + \cdots \\
U\left(\frac{1}{2\sqrt{m}+1}\right) &= \sqrt{m} - \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{3}{4m} + \cdots \\
A\left(\frac{1}{2\sqrt{m}+1}\right) &= \frac{1}{4m} + \cdots .
\end{aligned}
$$

선형방정식

$$\begin{aligned}\beta_i = &\gamma_i + \sum_j g_{ij}(r)\beta_j \\ &+ h(r)\sum_{j,k} h_{ijk}(r)(A_j(r)\beta_k + A_k(r)\beta_j)\end{aligned}$$

을 풀면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x^n]b(x)}{[x^n]W(x)} = \frac{1}{4m} - \frac{3}{4m\sqrt{m}} + \cdots$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x^n]T(x)}{[x^n]W(x)} = \frac{1}{m} - \frac{5}{2m\sqrt{m}} + \cdots.$$

같은 방법을 1,2차 단순 항진명제를 모두 포함하게 해서 계산하면

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[x^n]T(x)}{[x^n]W(x)} = \frac{1}{m} - \frac{7}{4m\sqrt{m}} + \cdots$$

References

- László Aszalós, Tamás Herendi, *Density of Tautologies in Logics with One Variable*, Acta Cybernetica, Vol.20, 385-398 (2012).
- Hervè Fournier, Daniéle Gardy, Antoine Genitrini, Marek Zaionc *Tautologies over implication with negative literals*, Mathematical Logic Quarterly, Vol.56, No.4, 388-396 (2010).
- Marek Zaionc, *On the asymptotic density of tautologies in logic of implication and negation*, Reports on Mathematical Logic, Vol.39, 67-87 (2005).